Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 1

№1 Обозначим емкость корзины – 1, вопрос задачи: за сколько съедят 2 емкости?

v_1 = скорость Софии

v_2 = скорость Арсения

v_3 = скорость Гошы

тогда из условия:

$$\frac{1}{v_1+v_2}=9$$

$$\frac{1}{v_2+v_3}=12$$

$$\frac{1}{v_1+v_3}=18$$

$$\begin{cases} 9v_1+9v_2=1 \\ 12v_2+12v_3=1 \\ 18v_1+18v_3=1 \end{cases}$$

① $v_1=\frac{1-9v_2}{9}$

② $18\cdot\left(\frac{1-9v_2}{9}\right)+18v_3=1$

$2-18v_2+18v_3=1$

$v_3=\frac{18v_2-1}{18}$

③ $12v_2+12\left(\frac{18v_2-1}{18}\right)=1$

$24v_2=\frac{5}{3}$ $\quad v_2=\frac{5}{72}$

④ $12\cdot\left(\frac{5}{72}\right)+12v_3=1$

$v_3=\frac{1}{72}$

⑤ $9v_1+\frac{5}{6}=1$

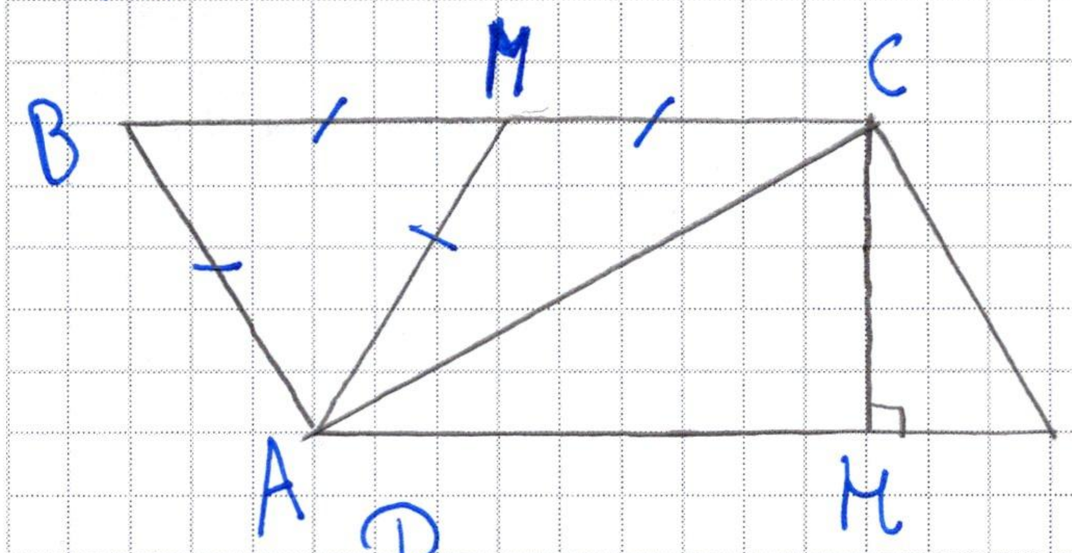
$v_1=\frac{3}{72}$

$$\frac{2}{v_1+v_2+v_3}=\frac{2}{\frac{9}{72}}=16$$

Ответ: 16 мин

Можно использовать оборот листа для записи решений

N3



Дано: ABCD - парал-м

$AB = 3$; $BC = 6$

$\angle BAC = 3\angle CAD$

Найти: S_{ABCD}

Решение:

Пусть $\angle CAD - \alpha$, тогда $\angle BAC = 3\alpha$

$\angle ABC = 180 - \angle BAD = 180 - 4\alpha$ ($BC \parallel AD$)

$\angle DAC = \angle ACB = \alpha$ (накрест леж $AD \parallel BC$); поставим M,

$BM = MC$ ($M \in BC$) $\longrightarrow AB = BM = MC = 3 \Rightarrow$

$\angle AMB = \angle BAM = 2\alpha \Rightarrow \angle MAC = \angle BAC - \angle MAB = \alpha =$

$= \angle MCA \Rightarrow AM = MC = MB = BA \Rightarrow$

$\angle BAC = 90°$; $\angle ABC = 60°$

$S_{ABCD} = CH \cdot AD$

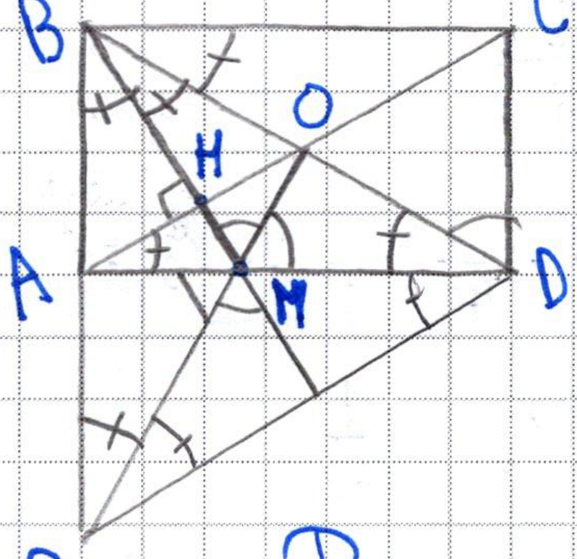
$CD = 3$; $\angle CDH = 60° \Rightarrow HD = 1{,}5 \Rightarrow$

$CH = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{4{,}5 \cdot 1{,}5} = \sqrt{1{,}5^2 \cdot 3} = 1{,}5\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 6 \cdot 1{,}5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ $(a-6)(a+6)$

Ответ: $\boxed{9\sqrt{3}}$

N5



Дано: ABCD - прямоугольник; $AC = 3{,}2$

$AC \perp BM$ ($M \in AD$); $H = AC \cap BM$

O - середина BD — $P = HO \cap AB$

$BM = MD$

Найти: PD; AM - ?

Решение: $OA = OC \Rightarrow O = AC \cap BD$ (св-во парал-ма)

$BM = MD \Rightarrow \triangle BMD$ - р/б $\Rightarrow MO$ (медиана) - $\frac{1}{2}BD$

пусть $\angle MBD - \alpha$, тогда $\angle MDB - \alpha$; $\angle DBC = \alpha$ ($\angle MDB = \angle DBC$)

olymp.bmstu.ru

$(3y-6)(x-4)=(5x-1)(x-4)$

$x=4$

тогда y - любое число

$x\neq 4$

$3y-6=5x-1$

$y=\frac{5(x+1)}{3}$

подходят все целые $(x;y)$, на прямой $\frac{5(x+1)}{3}$

$f(x)=$

$$\begin{cases} x=4+0y \\ y=\frac{5(x+1)}{3} \\ x;y\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

№4

$x(x^2-3)+(x+2)^2-(x^3+6)=(x+2)^2-3(x+2)=(x+2)(x-1)$

$x+\frac{18}{12}-1=x+\frac{36}{12}-1=x+2$

$\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=x-1$

$x\neq -2$

$|x-1|=a^2+1$

$|x-1|$ имеет только 1 решение, когда

$|x-1|=0 \Rightarrow x=1$, что положительно $\Rightarrow$

нет таких ~~отрицательных корней~~ параметров, что

уравнение имеет 1 решение (≤ 0)

Ответ: таких нет

olymp.bmstu.ru

№3 (продолжение)

т.к. ABCD - прямоуг., то $AO = OD = OC = OB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OAD = 2$; $\angle AMM = 90 - 2 \Rightarrow \angle ABM = 2$

$\angle ABM = \angle MBD = \angle DBC = 2 \Rightarrow \frac{90}{3} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMB = \angle BMO = \angle OMD = \angle PMA = 60°$

$\triangle PBM = \triangle PMD$ ($\angle BPM = \angle MPD = 30°$; PM - общая; $\angle PMD = \angle PMB$) $\Rightarrow PB = PD \Rightarrow \triangle PBD$ - равн. с $\angle BPD = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BPD$ - равн. стор

$PD = BD = AC = 3,2$

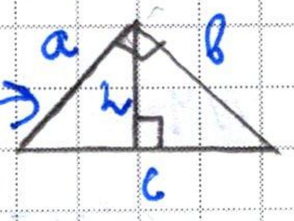
по св-ву высоты к гипотенузе - $AM = \frac{AM \cdot AB}{BM}$

в $\triangle AMB$ - $\angle AMB = 60°$

пусть $AM = x$; $MB = 2x$; $AB = \frac{1}{2} PB = \frac{1}{2} AC = 1,6$

$$AM = \frac{x \cdot 1,6}{2x} = 0,8$$

Ответ: 3,2 ; 0,8



$S_{\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$

№2

$(y-2) \cdot 3(x-4) = 5x^2 - 21x + 4$

Заметим, что $5x^2 - 21x + 4$ имеет корень - 4, найдем второй

$$5x^2 - 21x + 4 = (5x - 1)(x - 4)$$

	5	-21	4
4	5	-1	0